

피타고라스 정리는 직각삼각형에서 빗변 제곱이 밑변 제곱과 높이 제곱의 합과 같음을 말한다.

(3,4,5), (5,12,13) 등의 피타고라스 수가 발견된 이후 2580 년 동안, 피타고라스 수를 구하는 공식들이 여러 가지로 제시되었으나 모든 피타고라스 수를 완벽하게 구하는 공식이 없었다.

$$X^2+Y^2=Z^2$$

위 식의 자연수 (X,Y,Z) 는 피타고라스 수이고, 한편 (X,Y,Z) 는 무리수로 나타낼 수도 있다.

자연수 (A,B) 에서  $2AB=k^2$ (k 는 1,2,3...) 을 만족하는 자연수 (X,Y,Z) 는 모든 피타고라스 수를 나타낸다.  $A=Z-Y$ ,  $B=Z-X$  임으로 자연수 (X,Y,Z) 에서 (A,B) 는 항상 자연수가 되기 때문이다.

$$X=(2AB)^{1/2}+A, Y=(2AB)^{1/2}+B, Z=(2AB)^{1/2}+A+B$$

다음은 모든 피타고라스 수가 거듭제곱 수들만으로는 이루어 질 수 없다는 사실이다. 이는 X 와 Y 의 곱이 거듭제곱이 될 수 없기 때문으로서, 아래의 증명으로 확인될 수 있다.

$$XY=\{(2AB)^{1/2}+A\}\{(2AB)^{1/2}+B\}$$

자연수(A,B) 에서  $2AB=k^2$ (k 는 1,2,3...) 을 적용하여 아래와 같이 식을 변형한다.

$$XY=k(k+A)(k+2A)/2A=k(k+B)(k+2B)/2B$$

자연수 (A,B) 는 서로 소의 관계임으로  $A=c^2$ ,  $B=2d^2$  일 때, 위 식은 아래와 같이 된다.

$$XY=2cd(c+d)(c+2d)$$

위식에서 만약  $c=e^n$ ,  $d=2^{(n-1)}f^n$  이고,  $\{e^n+2^{(n-1)}f^n\}=s^n$ ,  $[e^n+2\{2^{(n-1)}f^n\}]=t^n$  이면, 아래와 같은 결과를 얻게 되는 것이다.

$$(2ef)^n\{e^n+2^{(n-1)}f^n\}[e^n+2\{2^{(n-1)}f^n\}]=2efst^n$$

이 때 (s,t) 는 아래와 같이 절대로 자연수가 될 수 없다.

$$\{e^n+2^{(n-1)}f^n\}[e^n+2\{2^{(n-1)}f^n\}]=(st)^n$$

$$\{e^n+2^{(n-1)}f^n\}=s^n$$

$$\{s^n+2^{(n-1)}f^n\}=t^n$$

$$1=(t^n-s^n)/(s^n-e^n), 2s^n=t^n+e^n$$

. . . . .

$$\{e^n+2\}\{e^n+2(2)\}=(st)^n$$

$$\{e^n+2\}=s^n$$

$$\{s^n+2\}=t^n$$

$$1=(t^n-s^n)/(s^n-e^n), 2s^n=t^n+e^n$$

$$\{e^n+1\}\{e^n+2\}=(st)^n$$

$$\{e^n+1\}=s^n$$

$$\{s^n+1\}=t^n$$

$$1=(t^n-s^n)/(s^n-e^n), 2s^n=t^n+e^n.$$

이상의 식과 같이 자연수 (e,f) 에서 (s,t) 가 동시에 자연수가 될 수는 없는 것이다. 끝.